

## แผนการจัดการเรียนรู้

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ สัมบัติของจำนวนเชิงซ้อน เรื่อง สมบัติสัมบัติของจำนวนเชิงซ้อน

เวลา 1 ชั่วโมง

### ผลการเรียนรู้

เข้าใจจำนวนเชิงซ้อนและใช้สมบัติของจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหา

### สาระสำคัญ

#### บทนิยาม 2

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน  $z = (a, b)$  หรือ  $z = a + bi$  เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง

เรียก  $a$  ว่า ส่วนจริง (real part) ของ  $z$  และเขียนแทนด้วย  $\text{Re}(z)$

เรียก  $b$  ว่า ส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ  $z$  และเขียนแทนด้วย  $\text{Im}(z)$

#### บทนิยาม 5

ให้  $z = a + bi$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน

สังยุค (conjugate) ของ  $z$  คือ  $a - bi$

สังยุคของ  $z$  เขียนแทนด้วย  $\bar{z}$  ซึ่ง  $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

### จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถอธิบายสมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนได้

### สาระการเรียนรู้

จำนวนเชิงซ้อนและสมบัติของจำนวนเชิงซ้อน

### กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูทบทวนความรู้เรื่องการบวก ลบ คูณ และหารจำนวนเชิงซ้อน โดยตั้งคำถามนักเรียน ดังนี้

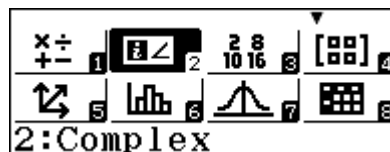
- การบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนเชิงซ้อน มีนิยามว่าอย่างไรและมีวิธีหาอย่างไร
- ให้นักเรียนยกตัวอย่างการบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนเชิงซ้อน
- นักเรียนและครูสรุปนิยาม การบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนเชิงซ้อน

$$\begin{aligned}\text{ซึ่งจะได้ว่า} \quad (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \\ (a + bi) - (c + di) &= (a - c) + (b - d)i \\ (a + bi)(c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

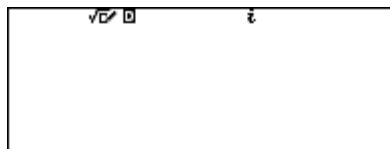
2. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้เรื่องสมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

3. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มจำนวน 5 กลุ่ม โดยทุกคนเตรียมเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz นักเรียนแต่ละกลุ่มใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz เพื่อใช้ในการหาสังยุคและสมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน โดยครูแนะนำวิธีการใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

3.1 กดปุ่ม **MENU**

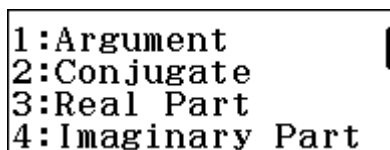


3.2 กดปุ่ม **2**



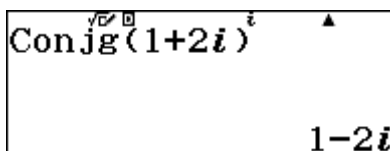
3.3 หาสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน  $1 + 2i$

โดยกดปุ่ม **OPTN**



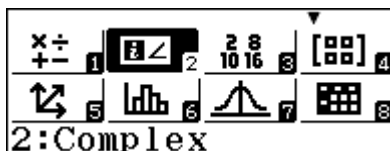
3.4 กดปุ่ม **2** **1** **+** **2** **ENG** **)** **=**

จะได้สังยุคของ  $1 + 2i$  คือ  $1 - 2i$

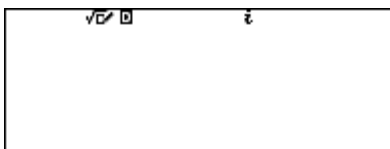


4. นักเรียนแต่ละกลุ่มใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz เพื่อใช้หาสมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน โดยการใช้การแทนค่าด้วยตัวแปร โดยครูแนะนำวิธีการใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

4.1 กดปุ่ม **MENU**

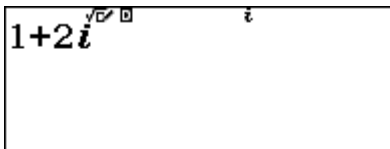


4.2 กดปุ่ม **2**



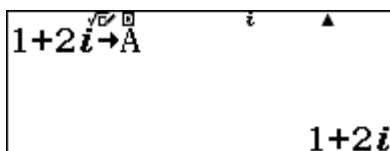
4.3 ป้อนจำนวนเชิงซ้อน  $1 + 2i$

โดยกดปุ่ม **1** **+** **2** **ENG**



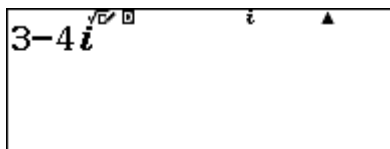
4.4 แทนค่าจำนวนเชิงซ้อน  $A = 1 + 2i$

โดยกดปุ่ม **STO** **(-)**



4.5 ป้อนจำนวนเชิงซ้อน  $3 - 4i$

โดยกดปุ่ม **3** **-** **4** **ENG**



4.6 แทนค่าจำนวนเชิงซ้อน  $B = 3 - 4i$

โดยกดปุ่ม **STO** **0,9**

$$3-4i \rightarrow B$$

4.7 หาส่วนจริงของ A หรือ  $\text{Re}(A)$

โดยกดปุ่ม **OPTN** **3** **ALPHA** **(←)** **)** **=**

$$\text{ReP}(A)$$

4.8 หาค่าของ  $\frac{1}{2}(A + \bar{A})$  โดยกดปุ่ม

**□** **1** **▼** **2** **▶** **(** **ALPHA** **(←)** **+**  
**OPTN** **2** **ALPHA** **(←)** **)** **)** **=**

$$\frac{1}{2}(A + \text{Conjg}(A))$$

4.9 หาส่วนจินตภาพของ A หรือ  $\text{Im}(A)$

โดยกดปุ่ม **OPTN** **4** **ALPHA** **(←)** **)** **=**

$$\text{ImP}(A)$$

4.10 หาค่าของ  $\frac{1}{2i}(A - \bar{A})$  โดยกดปุ่ม

**□** **1** **▼** **2** **ENG** **▶** **(** **ALPHA** **(←)**  
**-** **OPTN** **2** **ALPHA** **(←)** **)** **)** **=**

$$\frac{1}{2i}(A - \text{Conjg}(A))$$

4.11 หาค่าของ  $\bar{\bar{A}}$  โดยกดปุ่ม

**OPTN** **2** **OPTN** **2** **ALPHA** **(←)** **)** **)** **=**

$$\text{Conjg}(\text{Conjg}(A))$$

4.12 หาค่าของ  $\frac{1}{A}$  โดยกดปุ่ม

**□** **1** **▼** **OPTN** **2** **ALPHA** **(←)** **)** **=**

$$\frac{1}{\text{Conjg}(A)}$$

4.13 หาค่าของ  $\overline{\left(\frac{1}{A}\right)}$  โดยกดปุ่ม

**OPTN** **2** **□** **1** **▼** **ALPHA** **(←)** **▶** **)** **=**

$$\text{Conjg}\left(\frac{1}{A}\right)$$

4.14 หาค่าของ  $\overline{A+B}$  โดยกดปุ่ม

**OPTN** **2** **ALPHA** **(←)** **+** **ALPHA** **0,9** **)** **=**

$$\text{Conjg}(A+B)$$

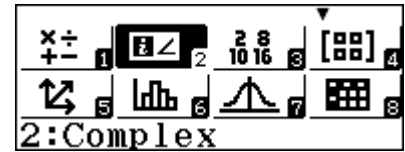
4.15 หาค่าของ  $\bar{A} + \bar{B}$  โดยกดปุ่ม

**OPTN** **2** **ALPHA** **(←)** **)** **+**  
**OPTN** **2** **ALPHA** **0,9** **)** **=**

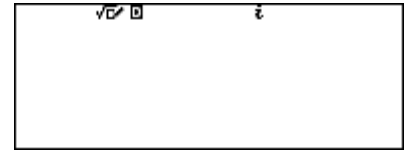
$$\text{Conjg}(A) + \text{Conjg}(B)$$

5. นักเรียนแต่ละกลุ่มใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz เพื่อใช้หาสมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน โดยการใช้การแทนค่าด้วยคำสั่ง **[CALC]** โดยครูแนะนำวิธีการใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

5.1 กดปุ่ม **[MENU]**

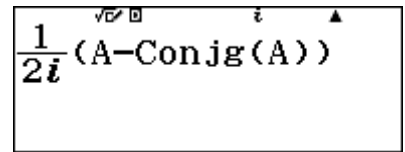


5.2 กดปุ่ม **[2]**



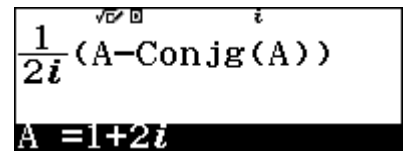
5.3 ป้อนนิพจน์  $\frac{1}{2i}(A - \bar{A})$  ที่ต้องการคำนวณหาค่า

โดยกดปุ่ม **[1]** **[2]** **[(-)]** **[>]** **[<]** **[ALPHA]** **[=]** **[OPTN]** **[2]** **[ALPHA]** **[(-)]** **[>]** **[<]** **[>]**



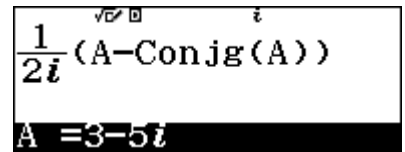
5.4 กดปุ่ม **[CALC]**

(เครื่องจะแสดงค่า A ที่ได้กำหนดไว้หลังสุด)



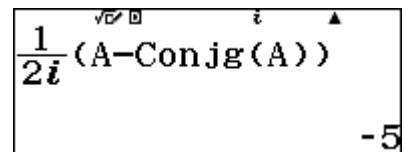
5.5 ป้อนค่าที่ต้องการคำนวณ เช่น  $A = 3 - 5i$

โดยกดปุ่ม **[3]** **[(-)]** **[5]** **[ENG]** **[=]**



5.6 สั่งให้เครื่องคำนวณโดยกดปุ่ม **[=]**

(ค่าที่คำนวณได้คือ -5)



6. ครูแจกใบกิจกรรมที่ 2.1 และ 2.2 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำและร่วมกันอภิปราย (ขั้นสำรวจ)

7. นักเรียนแต่ละกลุ่มนำเสนอใบกิจกรรมที่ได้รับและอภิปรายผลเพื่อนำไปสู่การตรวจสอบสมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้ (ขั้นหาความสัมพันธ์)

ใบกิจกรรมที่ 2.1 ถ้า  $Z = a + bi$  เมื่อ  $a, b$  เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$$\bar{Z} = a - bi, \quad \operatorname{Re}(Z) = a = \frac{1}{2}(Z + \bar{Z}) \quad \text{และ} \quad \operatorname{Im}(Z) = b = \frac{1}{2i}(Z - \bar{Z})$$

ใบกิจกรรมที่ 2.2 ถ้า  $Z, Z_1$  และ  $Z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

1)  $\overline{\bar{Z}} = Z$

2)  $\frac{1}{\bar{Z}} = \overline{\left(\frac{1}{Z}\right)}$  โดยที่  $Z \neq 0$

3.)  $\overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$

$$4) \overline{Z_1 - Z_2} = \overline{Z_1} - \overline{Z_2}$$

$$5) \overline{Z_1 Z_2} = \overline{Z_1} \overline{Z_2}$$

$$6) \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \quad \text{โดยที่ } Z_2 \neq 0$$

8. ครูให้นิยามตามบทนิยาม 5 หน้า 14 ในหนังสือเรียน สสวท. รายวิชาเพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 ตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ดังนี้

ให้  $z = a + bi$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน

สังยุค (conjugate) ของ  $z$  คือ  $a - bi$

9. ครูและนักเรียนช่วยกันพิสูจน์สมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนตามหลักการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อยืนยันสมบัติต่างๆ ว่าเป็นจริงทุกกรณี อีกครั้งหนึ่ง

10. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเพื่อสรุปสมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนที่ได้จากการสำรวจ (ขั้นสรุป

ความสัมพันธ์) จะได้ว่า

ถ้า  $Z, Z_1$  และ  $Z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ  $z = a + bi$

$$1. \operatorname{Re}(Z) = a = \frac{1}{2}(Z + \bar{Z}) \quad \text{และ} \quad \operatorname{Im}(Z) = b = \frac{1}{2i}(Z - \bar{Z})$$

$$2. \bar{\bar{Z}} = Z$$

$$3. \frac{1}{\bar{Z}} = \overline{\left(\frac{1}{Z}\right)} \quad \text{เมื่อ } Z \neq 0$$

$$4. \overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$$

$$5. \overline{Z_1 - Z_2} = \overline{Z_1} - \overline{Z_2}$$

$$6. \overline{Z_1 Z_2} = \overline{Z_1} \overline{Z_2}$$

$$7. \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \quad \text{เมื่อ } Z_2 \neq 0$$

11. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 2 เรื่อง สังยุคและสมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน โดยไม่ใช่เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz (ขั้นฝึกทักษะ)

## สื่อการเรียนรู้

1. เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz
2. ใบกิจกรรมที่ 2.1 – 2.2 เรื่อง สังกะและสมบัติสังกะของจำนวนเชิงซ้อน
3. แบบฝึกทักษะที่ 2 เรื่อง สังกะและสมบัติสังกะของจำนวนเชิงซ้อน

## การวัดและประเมินผล

1. ประเมินจากการทำใบกิจกรรมที่ 2.1 – 2.2
2. ประเมินจากการทำแบบฝึกทักษะที่ 2
3. ประเมินจากการตอบคำถามของนักเรียน

ใบกิจกรรมที่ 2.1		หน้าที่ 1/2
เรื่อง สังยุคและสมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน		
จุดประสงค์ สามารถหาสังยุคและบอกสมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนได้		
คำชี้แจง ให้นักเรียน ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz คำนวณค่าต่อไปนี้		
ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2
1	$A = 3 - 2i$	$\bar{A} =$
	$\text{Re}(A) =$	$\frac{1}{2}(A + \bar{A}) =$
	$\text{Im}(A) =$	$\frac{1}{2i}(A - \bar{A}) =$
2	$B = -8 + 5i$	$\bar{B} =$
	$\text{Re}(B) =$	$\frac{1}{2}(B + \bar{B}) =$
	$\text{Im}(B) =$	$\frac{1}{2i}(B - \bar{B}) =$
3	$C = 1.5 + 3.2i$	$\bar{C} =$
	$\text{Re}(C) =$	$\frac{1}{2}(C + \bar{C}) =$
	$\text{Im}(C) =$	$\frac{1}{2i}(C - \bar{C}) =$
4	$D = 13i$	$\bar{D} =$
	$\text{Re}(D) =$	$\frac{1}{2}(D + \bar{D}) =$
	$\text{Im}(D) =$	$\frac{1}{2i}(D - \bar{D}) =$
5	$E = 10$	$\bar{E} =$
	$\text{Re}(E) =$	$\frac{1}{2}(E + \bar{E}) =$
	$\text{Im}(E) =$	$\frac{1}{2i}(E - \bar{E}) =$
6	$F = -11 - 15i$	$\bar{F} =$
	$\text{Re}(F) =$	$\frac{1}{2}(F + \bar{F}) =$
	$\text{Im}(F) =$	$\frac{1}{2i}(F - \bar{F}) =$

ใบกิจกรรมที่ 2.1		หน้าที่ 2/2
เรื่อง สังยุคและสมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน		
จุดประสงค์ สามารถหาสังยุคและบอกสมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนได้		
คำชี้แจง ให้นักเรียน ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz คำนวณค่าต่อไปนี้		
ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2
7	$x = 13 - 9i$	$\bar{x} =$
	$\text{Re}(x) =$	$\frac{1}{2}(x + \bar{x}) =$
	$\text{Im}(x) =$	$\frac{1}{2i}(x - \bar{x}) =$
8	$y = 14 + 25i$	$\bar{y} =$
	$\text{Re}(y) =$	$\frac{1}{2}(y + \bar{y}) =$
	$\text{Im}(y) =$	$\frac{1}{2i}(y - \bar{y}) =$
9	$M = 21.7 + 13.4i$	$\bar{M} =$
	$\text{Re}(M) =$	$\frac{1}{2}(M + \bar{M}) =$
	$\text{Im}(M) =$	$\frac{1}{2i}(M - \bar{M}) =$
10	$M = 32 + 35i$	$\bar{M} =$
	$\text{Re}(M) =$	$\frac{1}{2}(M + \bar{M}) =$
	$\text{Im}(M) =$	$\frac{1}{2i}(M - \bar{M}) =$

จาก ข้อ 1 – 10 กรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 พบว่า ถ้า  $a, b$  เป็นจำนวนจริง และ  $Z$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า  $Z = a + bi$  จะได้  $Z = \dots\dots\dots$

$\text{Re}(Z) = a = \dots\dots\dots$

และ  $\text{Im}(Z) = b = \dots\dots\dots$

ใบกิจกรรมที่ 2.2		หน้าที่ 1/2
เรื่อง สมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน		
จุดประสงค์ สามารถบอกสมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนได้		
คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz คำนวณค่าต่อไปนี้		
ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2
1	$A = 3 - 2i$	$\bar{A} =$
2	$B = -8 + 5i$	$\bar{B} =$
3	$C = 1.5 + 3.2i$	$\bar{C} =$
4	$D = 13i$	$\bar{D} =$
5	$E = 10$	$\bar{E} =$
จาก ข้อ 1 – 5 กรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 พบว่า $Z$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ $\bar{\bar{Z}} =$ .....		
6	$\frac{1}{A} =$	$\overline{\left(\frac{1}{A}\right)} =$
7	$\frac{1}{B} =$	$\overline{\left(\frac{1}{B}\right)} =$
8	$\frac{1}{C} =$	$\overline{\left(\frac{1}{C}\right)} =$
9	$\frac{1}{D} =$	$\overline{\left(\frac{1}{D}\right)} =$
10	$\frac{1}{E} =$	$\overline{\left(\frac{1}{E}\right)} =$
จาก ข้อ 6 – 10 กรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 พบว่า $Z$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $Z \neq 0$ จะได้ $\frac{1}{\bar{Z}} =$ .....		
11	$\overline{A + B} =$	$\bar{A} + \bar{B} =$
12	$\overline{B + C} =$	$\bar{B} + \bar{C} =$
13	$\overline{C + D} =$	$\bar{C} + \bar{D} =$
14	$\overline{D + E} =$	$\bar{D} + \bar{E} =$
15	$\overline{A + E} =$	$\bar{A} + \bar{E} =$
จาก ข้อ 11 – 15 กรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 พบว่า $Z_1$ และ $Z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ $\overline{Z_1 + Z_2} =$ .....		

ใบกิจกรรมที่ 2.2		หน้าที่ 2/2
เรื่อง สมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน		
จุดประสงค์ สามารถบอกสมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนได้		
คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz คำนวณค่าต่อไปนี้		
ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2
16	$\overline{A - B} =$	$\overline{A} - \overline{B} =$
17	$\overline{B - C} =$	$\overline{B} - \overline{C} =$
18	$\overline{C - D} =$	$\overline{C} - \overline{D} =$
19	$\overline{D - E} =$	$\overline{D} - \overline{E} =$
20	$\overline{A - E} =$	$\overline{A} - \overline{E} =$
จาก ข้อ 16 – 20 กรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 พบว่า $Z_1$ และ $Z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ $\overline{Z_1 - Z_2} =$ .....		
21	$\overline{AB} =$	$\overline{A} \overline{B} =$
22	$\overline{BC} =$	$\overline{B} \overline{C} =$
23	$\overline{CD} =$	$\overline{C} \overline{D} =$
24	$\overline{DE} =$	$\overline{D} \overline{E} =$
25	$\overline{AE} =$	$\overline{A} \overline{E} =$
จาก ข้อ 21 – 25 กรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 พบว่า $Z_1$ และ $Z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ $\overline{Z_1 Z_2} =$ .....		
26	$\overline{\left(\frac{A}{B}\right)} =$	$\frac{\overline{A}}{\overline{B}} =$
27	$\overline{\left(\frac{B}{C}\right)} =$	$\frac{\overline{B}}{\overline{C}} =$
28	$\overline{\left(\frac{C}{D}\right)} =$	$\frac{\overline{C}}{\overline{D}} =$
29	$\overline{\left(\frac{D}{E}\right)} =$	$\frac{\overline{D}}{\overline{E}} =$
30	$\overline{\left(\frac{A}{E}\right)} =$	$\frac{\overline{A}}{\overline{E}} =$
จาก ข้อ 26 – 30 กรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 พบว่า $Z_1$ และ $Z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $Z_2 \neq 0$ จะได้ $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} =$ .....		

## แบบฝึกทักษะที่ 2

### เรื่องสังยุคและสมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

คำชี้แจง กำหนด  $Z$ ,  $Z_1$  และ  $Z_2$  เป็น จำนวนเชิงซ้อน ให้นักเรียนเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง โดยไม่ใช่เครื่องหมายคณิตศาสตร์

1.  $\overline{4+3i} = \dots\dots\dots$

2.  $\overline{5-7i} = \dots\dots\dots$

3.  $\overline{-8-6i} = \dots\dots\dots$

4.  $\overline{-2+5i} = \dots\dots\dots$

5.  $\overline{4.5+3.2i} = \dots\dots\dots$

6.  $\overline{25} = \dots\dots\dots$

7.  $\overline{30i} = \dots\dots\dots$

8.  $\frac{1}{2}(Z + \bar{Z}) = \dots\dots\dots$

9.  $\frac{1}{2i}(Z - \bar{Z}) = \dots\dots\dots$

10.  $\bar{\bar{Z}} = \dots\dots\dots$

11.  $\overline{\left(\frac{1}{Z}\right)} = \dots\dots\dots$  เมื่อ  $Z \neq 0$

12.  $\overline{Z_1 + Z_2} = \dots\dots\dots$

13.  $\overline{Z_1 - Z_2} = \dots\dots\dots$

14.  $\overline{Z_1 Z_2} = \dots\dots\dots$

15.  $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \dots\dots\dots$  เมื่อ  $Z_2 \neq 0$